TD2 :: Operations arithmetiques dans le calcul lambda

Programmation fonctionnelle

1 Partie I. Codage d'entiers de Church

$$\mathcal{T} = \lambda xy.x, \quad \mathcal{F} = \lambda xy.y, \quad Cond = \lambda xyz.xyz.$$

Question 1.1. *Soit*

- $\lceil 0 \rceil = \lambda fy.y$
- $\lceil 1 \rceil = \lambda fy.fy$
- $\lceil n \rceil = \lambda fy.\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\ fois}\,y)\ldots))$
- $\textsc{Succ} = \lambda nfz.f(nfz)$
- $\textsc{Plus} = \lambda nmfx.nf(mfx)$
- $\textsc{Mult} = \lambda nmf.n(mf)$
- $\textsc{Exp} = \lambda nm.mn$

Calculer les beta-reductions pour les termes suivants:

1. $\lceil 0 \rceil(\lambda x.x)$
2. $\textsc{Plus}\lceil 1 \rceil\lceil 2 \rceil$
3. $\textsc{Exp}\lceil 2 \rceil\lceil 2 \rceil$

Question 1.2. *Montrer que* Plus *permet bien d'interpréter l'addition de deux entiers.*

Question 1.3. *Trouver un predicat* EstZero *tel que*

$$\textsc{EstZero}\lceil 0 \rceil = \mathcal{T}, \quad \textsc{EstZero}\lceil n \rceil = \mathcal{F}, \quad n > 0.$$

2 Partie II. Equations recursives

Question 2.1. *Trouver un λ-terme G tel que pour chaque X on a*

$$GX = XXX$$

Question 2.2. *Trouver un λ-terme X tel que pour chaque F on a*

$$FX = X\mathcal{I}, \quad \mathcal{I} = \lambda x.x$$

Théorème. *Pour tout F il existe un terme lambda X tel que*

$$FX = X$$

Question 2.3. *Montrer que les termes suivantes*

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \quad et \quad \Theta = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$$

satisfont la propriété de combinateur de point fixe

$$Yn = n(Yn) \quad et \quad \Theta n = n(\Theta n).$$

Utilisez-le pour démontrer la théorème precedente.

Question 2.4. *Resoudre les equations*

1. X *connu, trouver* F *tel que* $FX = F$.
2. X *connu, trouver* F *tel que* $FX = XF$.

Question 2.5. *Definir* Plus *et* factorielle *à l'aide de théorème de point fixe.*

3 Partie III. Arithmetique de Barendregt

Soit

- $\langle M, N\rangle := \textsc{Pair}\ MN := \lambda x.xMN$
- $\textsc{fst}\langle M, N\rangle = M$
- $\textsc{snd}\langle M, N\rangle = N$

Question 3.1. *Trouvez* fst *et* snd.

On definit les nombres entiers à la façon suivante:

$$\lceil 0\rceil = \mathcal{I} = \lambda x.x, \quad \lceil n+1\rceil = \langle \mathcal{F}, \lceil n\rceil\rangle$$

Question 3.2. *Definir* EstZero *dans la codage de Barendregt.*

Question 3.3. *Definir l'addition de deux nombres dans la codage de Barendregt.*

Question 3.4. *Prouver la théorème de points fixes multiples: trouver* X_1 *et* X_2 *tels que*

$$X_1 = F_1X_1X_2,$$
$$X_2 = F_2X_1X_2.$$

Indice: utilisez la définition de paire.

4 Divertissement

Question 4.1. *Soit* $Y = FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF$,

$$F = \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator).$$

Montrez que Y *satisfait* $Yn = n(Yn)$.